PART2 関数の極大・極小

要点整理と公式

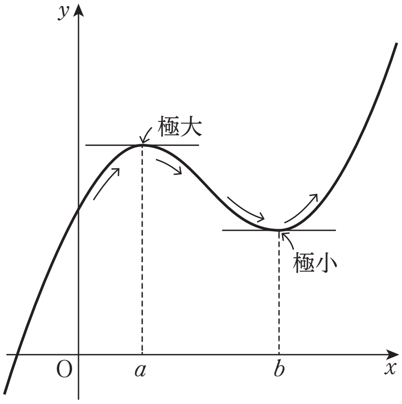
要点 ① 関数の極大と極小

関数 $f(x)$ を連続な関数とする。

$f(x)$ が $x=a$ を境に増加から減少に移るとき，$f(x)$ は $x=a$ で「　　　」になるといい，$f(a)$ を「　　　」という。

$f(x)$ が $x=b$ を境に減少から増加に移るとき，$f(x)$ は $x=b$ で「　　　」になるといい，$f(b)$ を「　　　」という。

極大値と極小値をまとめて「　　　」という。



一般に，次のことが成り立つ。

極値をとるための必要条件

関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能であるとき，$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば $f'(a)=0$

$f(x)$ が微分可能で，$f'(a)=0$ であるとき，$x=a$ を境に

$f'(x)$ の値が　　から　　に変わるならば，$f(a)$ は

$f'(x)$ の値が　　から　　に変わるならば，$f(a)$ は

である。

(ex) 関数 $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$ の極値について

$$f'(x)=\frac{4(x^2+4)-4x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}=-\frac{4(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$$

$(x^2+4)^2>0$ であるから，$f'(x)=0$ とすると $x=-2$，2

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

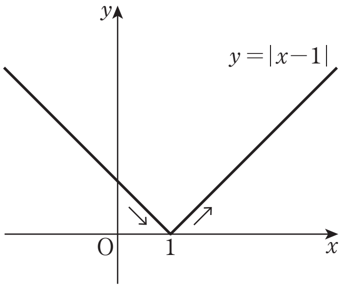
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$		-1		1	

したがって，$f(x)$ は $x=2$ で極大値 1，$x=-2$ で極小値 -1 をとる。

$f'(a)=0$ であっても，$f(a)$ が極値であるとは限らない。例えば，関数 $f(x)=x^3$ は，$f'(x)=3x^2$，$f'(0)=0$ であるが，$x=0$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わらないから，$x=0$ で極値をとらない。

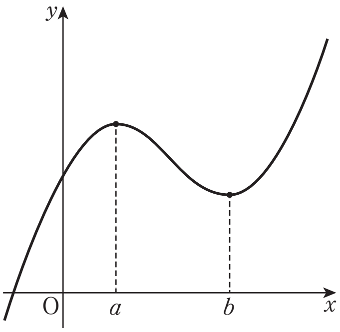
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ではない場合にも，$f(a)$ が極値となる場合がある。例えば，$f(x)=|x-1|$ について，$f(x)$ は $x=1$ で微分可能ではないが，$x=1$ を境に減少から増加に移るから，$f(1)$ は極小値である。



$x=a$ を含む十分小さい開区間における最大値，すなわち $x \neq a$ ならば $f(x)<f(a)$ が成り立つときの $f(a)$ の値が極大値である。

また，$x=b$ を含む十分小さい開区間における最小値，すなわち $x \neq b$ ならば $f(x)>f(b)$ が成り立つときの $f(b)$ の値が極小値である。



2 次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x)=\cos 2x-2\cos x\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$　　(2) $f(x)=|x-1|\sqrt{x}$

Point Pickup

関数の極値

$f(x)$ が微分可能で，$f'(a)=0$ であるとき，$x=a$ を境に

$f'(x)$ の値が 正 から 負 に変わるならば，$f(a)$ は 極大値

$f'(x)$ の値が 負 から 正 に変わるならば，$f(a)$ は 極小値　をとる。

$f'(x)=0$ となる x の値の前後の範囲における $f'(x)$ の変化を調べる。定義域に注意。

※関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ではない場合にも，$f(a)$ が極値となる場合がある。

第11講 PART2 確認問題

1 $0<x<2\pi$ において，関数 $f(x)=\sin^2 x+\cos x+1$ は，

$x=$ ア で極大値 $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$

$x=$ エ で極小値 オ

をとる。

ただし，ア，エ は下の①～⑥のうちから選べ。

① $\dfrac{\pi}{2}$　② $\dfrac{\pi}{6}$　③ $\dfrac{2}{3}\pi$

④ π　⑤ $\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$　⑥ $\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

2 関数 $f(x)=|x-6|\sqrt{x}$ は，

$x=$ カ で極大値 キ$\sqrt{\boxed{ク}}$

$x=$ ケ で極小値 コ

をとる。

PART2 関数の極大・極小

2 次の関数の極値を求めよ。

(1)　$f(x)=\cos 2x-2\cos x\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$　　(2)　$f(x)=|x-1|\sqrt{x}$

[解答]

(1)　$f'(x)=-2\sin 2x+2\sin x=-2\cdot 2\sin x\cos x+2\sin x=2\sin x(1-2\cos x)$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で，$f'(x)=0$ となる x の値は $\sin x=0$ より $x=0$，π，2π

$1-2\cos x=0$ より $\cos x=\dfrac{1}{2}$　$x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	3	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	-1

したがって，$f(x)$ は $x=\pi$ で極大値 3，$x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$ で極小値 $-\dfrac{3}{2}$ をとる。

(2)　関数 $f(x)$ の定義域は $x \geqq 0$

$x \geqq 1$ のとき $f(x)=(x-1)\sqrt{x}$ であるから

$x>1$ のとき $f'(x)=\sqrt{x}+\dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$

よって，$x>1$ においてつねに $f'(x)>0$

$0 \leqq x<1$ のとき $f(x)=-(x-1)\sqrt{x}$ であるから

$0<x<1$ のとき $f'(x)=-\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$

$0<x<1$ の範囲で，$f'(x)=0$ となる x の値は $x=\dfrac{1}{3}$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	／	$+$
$f(x)$	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0	↗

したがって，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{3}$ で極大値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，$x=1$ で極小値 0 をとる。

第11講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：⑤，イ：9，ウ：4，エ：④，オ：0

[解説]

$$f'(x)=2\sin x\cdot\cos x-\sin x$$
$$=\sin x(2\cos x-1)$$

$0<x<2\pi$ の範囲で $f'(x)=0$ となる x の値は，

$\sin x=0$ より，$x=\pi$

$2\cos x-1=0$ より，$\cos x=\dfrac{1}{2}$ だから，

$$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	／
$f(x)$	／	↗	$\frac{9}{4}$	↘	0	↗	$\frac{9}{4}$	↘	／

[A]

したがって，$f(x)$ は，

$$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi} \textbf{ で極大値 } \boldsymbol{\frac{9}{4}}$$

$$\boldsymbol{x=\pi} \textbf{ で極小値 } \boldsymbol{0}$$

をとる。

[A]　関数の極値
$f(x)$ が微分可能で，$f'(a)=0$ であるとき，$x=a$ を境に $f'(x)$ の符号が変わるとき，$f(a)$ は極値である。
ここで，$f'(x)$ の符号が
正から負に変わるならば，
　$f(a)$ は極大値
負から正に変わるならば，
　$f(a)$ は極小値
である。

2

[正解] カ：2，キ：4，ク：2，ケ：6，コ：0

[解説]

関数 $f(x)$ の定義域は，$x \geqq 0$

(i)　$x \geqq 6$ のとき，

$f(x)=(x-6)\sqrt{x}$ であるから，

$x>6$ のとき，

$$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x-6}{2\sqrt{x}}=\frac{3x-6}{2\sqrt{x}}$$ [B]

よって，$x>6$ において，つねに $f'(x)>0$

[B]　$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(ii)　$0 \leqq x<6$ のとき，

$f(x)=-(x-6)\sqrt{x}$ であるから，

$0<x<6$ のとき，

$$f'(x)=-\frac{3x-6}{2\sqrt{x}}$$

$0<x<6$ の範囲で $f'(x)=0$ となる x の値は，

$$x=2$$

(i)，(ii)より，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	0	↗	$4\sqrt{2}$	↘	0	↗

[C]

[C]　$f(x)$ は $x=6$ で微分可能ではないが，$x=6$ を境に $f'(x)$ の符号が変わるので，$f(6)$ は極値である。

したがって，$f(x)$ は，

$x=2$ で極大値 $4\sqrt{2}$

$x=6$ で極小値 0

をとる。